10 класс. Материал для подготовки к экзамену по алгебре и началам анализа.

Часть 1. Решите №№ 1-7 и полученный ответ запишите в таблицу ответов (ответом может быть как число, так и выражение).

1. Упростите выражение $\sin^2(180^\circ + 3\alpha) \frac{\sin(3\alpha - 90^\circ)}{\sin(360^\circ - 3\alpha)} \operatorname{ctg}(180^\circ - 3\alpha)$.

2. Вычислите $0,1 \cdot \sqrt{20} : \sqrt{45} - 2\frac{17}{30}$.

3. Найдите производную функции $y = \sqrt{x} \cos x$.

4. Найдите производную функции $y = \left(-2\operatorname{tg} \frac{x}{4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$.

5. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ в его точке с абсциссой $x_0 = 4$.

6. Решите неравенство $\sqrt{14-x} \geq -5$.

7. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 8)$. Найдите количество точек

экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 8]$

8. График первообразной для функции $f(x) = 3\sin x - 2\cos x$ проходит через точку $(-2\pi; 0)$. Найдите точку, в которой этот график пересекает ось ординат

8. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?

Часть 2. Ответом на каждое задание №№ 8-15 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов.

9. Укажите количество целых решений неравенства $\frac{4-x}{x-5} \geq \frac{1}{1-x}$.

10. Найдите значение выражения $-\frac{18x_0}{\pi}$, где x_0 – наименьший положительный корень уравнения $\sin^2 x + 2\sin x = 0$.

11. Решите уравнение $\frac{\sqrt{22x-13} - 5x + 2}{\sqrt{x+24} - 5} = 0$.

12. Дано $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}; \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите $\cos 2\alpha$

13. Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 1$ на отрезке $x \in [-2; 2]$.

14. Пусть x_0 – точка минимума функции $f(x) = 5 - \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$. Найдите $f(x_0)$

15. Вычислите $\cos\left(\operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$

16. Два тела совершают прямолинейное движение по законам $s_1(t) = 3t^2 - 2t + 10, s_2(t) = t^2 + 5t + 1$, где s – путь в метрах, t – время в секундах. Через сколько секунд, считая от $t=0$, скорость движения первого тела будет в два раза больше скорости движения второго тела?

Часть 3. Запишите номер задания, а затем его полное решение

17. а) Решите уравнение $6\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin 2x \cdot \cos \frac{7\pi}{3} = 2 + \cos^2 x$;

б) найдите корни на отрезке $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$

17. Найдите все корни уравнения $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = -2\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$, принадлежащие области определения функции $y = \sqrt{\pi^2 - 4x^2}$.

18. Решите неравенство а) $\sqrt{9x-20} < x$. б) $\frac{4-3x}{2x-1} + 11\sqrt{\frac{3x-4}{2x-1}} > 24$

18. Решите уравнение $\sqrt{3x-2\sqrt{3x-1}} = 1 - \sqrt{3x-4\sqrt{3x-1}+3}$.

19. Исследуйте свойства функции и постройте график функции $y = \frac{\left(\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - 3\right)(x+1)(4-x^3)}{x^4 - x^2}$.

20. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера «люкс» площадью 40 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 квадратных метров. Предприниматель может определить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?