

Программа для подготовки к коллоквиуму по тригонометрии по теме **"Тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции. Тригонометрические уравнения. Графики тригонометрических функций и аркфункций"**.

1. Вспомните определение функции.
2. Вспомните определение возрастающей (убывающей) функции.
3. Вспомните определения четной функции, нечетной функции, функции общего вида.
4. Каким условием обладает график четной, нечетной функций?
5. Определение периодической функции.
6. Перечислите основные свойства функции $y = \sin x$:
 - область определения функции;
 - множество значений функции;
 - характер четности функции
 - периодичность функции
 - характер монотонности функции (уметь доказать по определению);
 - нули функции
 - график функции
7. Перечислите основные свойства функции $y = \cos x$:
 - область определения функции;
 - множество значений функции;
 - характер четности функции
 - периодичность функции
 - характер монотонности функции (уметь доказать по определению);
 - нули функции
 - график функции
8. Перечислите основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$:
 - область определения функции;
 - множество значений функции;
 - характер четности функции
 - периодичность функции
 - характер монотонности функции (уметь доказать по определению);
 - нули функции
 - график функции
9. Перечислите основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$:
 - область определения функции;
 - множество значений функции;
 - характер четности функции
 - периодичность функции
 - характер монотонности функции (уметь доказать по определению);
 - нули функции
 - график функции
10. Вспомните значения основных тригонометрических функций для простейших углов $\left(0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
11. Понятие обратной функции.
12. Каким условием должна обладать функция, чтобы для нее существовала обратная функция?
13. Каким свойством обладают графики обратных функций?
14. Что вы знаете о монотонности обратной функции?
15. Что вы знаете о нечетности обратных функций?
16. Дайте определение арксинуса числа. Приведите примеры.
17. Дайте определение функции $y = \operatorname{arcsin} x$.
18. Перечислите основные свойства функции $y = \operatorname{arcsin} x$:
 - область определения функции;
 - множество значений функции;
 - характер четности функции (уметь доказать по определению);
 - характер монотонности функции;
 - нули функции.
19. Покажите как строится график функции $y = \operatorname{arcsin} x$.
20. Дайте определение арккосинуса числа. Приведите примеры.
21. Дайте определение функции $y = \operatorname{arccos} x$.
22. Перечислите основные свойства функции $y = \operatorname{arccos} x$:
 - область определения функции;

- множество значений функции;
 - характер четности функции (доказать $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$);
 - характер монотонности функции;
 - нули функции.
23. Покажите как строится график функции $y = \arccos x$.
24. Дайте определение арктангенса числа. Приведите примеры.
25. Дайте определение функции $y = \arctg x$.
26. Перечислите основные свойства функции $y = \arctg x$:
- область определения функции;
 - множество значений функции;
 - характер четности функции (доказать $\arctg(-x) = -\arctg x$);
 - характер монотонности функции;
 - нули функции.
27. Покажите как строится график функции $y = \arctg x$.
28. Дайте определение арккотангенса числа. Приведите примеры.
29. Дайте определение функции $y = \text{arcctg} x$.
30. Перечислите основные свойства функции $y = \text{arcctg} x$:
- область определения функции;
 - множество значений функции;
 - характер четности функции (доказать $\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg} x$);
 - характер монотонности функции;
 - нули функции.
31. Покажите как строится график функции $y = \text{arcctg} x$.
32. Докажите основные тождества (для 10-2):
- $$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, |x| \leq 1; \quad \arctg x + \text{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, x \in R;$$
- $$\text{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1; \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, |x| \leq 1;$$
- $$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, |x| \leq 1; \quad \text{tg}(\text{arcctg} x) = \frac{1}{x}, x \neq 0.$$
33. Покажите с помощью тригонометрического круга частные случаи решения тригонометрических уравнений типа $\sin x = 0$ $\sin x = 1$ $\sin x = -1$ $\cos x = 0$ $\cos x = 1$ $\cos x = -1$
34. Выведите формулу корней тригонометрического уравнения $\sin x = a$
35. Выведите формулу корней тригонометрического уравнения $\cos x = a$
36. Выведите формулу корней тригонометрического уравнения $\text{tg} x = a$
37. Выведите формулу корней тригонометрического уравнения $\text{ctg} x = a$.

Теоретические упражнения

1. Уметь находить:
- $$\arcsin(-1); \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}; \arccos 1; \arccos\left(-\frac{1}{2}\right); \arctg \sqrt{3}; \arctg 1; \text{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right); \arcsin 0; \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$$
- и т.д.
2. Уметь находить значение следующих выражений:
- $$\sin \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi; \sin \frac{4\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3} + \sin(-21\pi); \text{arcctg} 1 - \arctg \sqrt{3} - \arccos(-0,5);$$
- $$\arcsin(-0,5) + \arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \text{arcctg} \sqrt{3}; \text{tg}\left(\arccos 1 - 2\arctg \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \cos\left(\arctg \frac{3}{\sqrt{3}} + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right);$$
- $$\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right); \arccos\left(\cos \frac{10\pi}{3}\right); \arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right); \arctg\left(\text{tg} \frac{12\pi}{7}\right); \text{arcctg}\left(\text{ctg}\left(-\frac{25\pi}{8}\right)\right).$$
3. Уметь находить наибольшее (наименьшее) среди чисел: а) $\arcsin \frac{\sqrt{10}}{4}; \frac{\pi}{4}$, б) $\arctg \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\pi}{3}$
4. Уметь находить область определения функций:

$$y = \sin \frac{x}{5}; y = 4 \cos \sqrt{x}; y = 3 \operatorname{ctg} 7x - 2; y = \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 5; y = 5 \arccos(4 - x);$$

$$y = \arcsin \left(\frac{3}{x} \right) - 12 \arccos \left(x + \frac{1}{2} \right); y = \operatorname{arctg} \frac{5}{4 - x^2} + \arcsin(x - 2); y = \operatorname{arcctg} x - \arccos(x^2 + 1).$$

5. Уметь находить области значений функций:

$$y = 7 \sin \frac{x}{5} + 4; y = 7 \arcsin(x - 2); y = 3 \arccos x^2 + \frac{\pi}{2}; y = \frac{\pi}{6} + \operatorname{arcctg}(7 - x); y = \frac{5\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

6. Уметь исследовать функции на четность с помощью определения:

$$y = \cos \frac{x}{5} \operatorname{tg} 2x; y = 2 \operatorname{arctg} x - 3 \arcsin x; y = 5 \operatorname{arcctg} x - 5 \arccos x; y = \arcsin \frac{x}{2} \cdot \operatorname{arctg} 8x;$$

$$y = 4 \arccos x \cdot \operatorname{arctg} \frac{3x}{2}.$$

7. Уметь строить графики функций:

$$y = 2 \arcsin x; y = \arcsin 2x; y = \arccos|x|; y = |\operatorname{arctg} x|; y = \arccos(x + 1); y = \arccos x - \frac{\pi}{3};$$

$$y = -\arcsin x; y = \arccos(-x); y = 2 \arcsin(|x| - 2) + \frac{\pi}{4}; y = \left| \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{x}{2} \right|.$$

8. Уметь строить графики функций:

$$y = \sin \left| 3x + \frac{\pi}{6} \right| - 2; y = \operatorname{tg} \left(|x| + \frac{\pi}{4} \right); y = 2 \cos \frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}; y = \left| \operatorname{arcctg} |x| - \frac{\pi}{3} \right|.$$

9. Уметь строить графики функций:

$$y = \sin(\arcsin x); y = \cos(\arccos(x^2 - 1)); y = \arcsin x^2 - 2x; y = \arccos \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 - 4}.$$

10. Уметь решать уравнения вида:

$$\text{а) } \arcsin 2x = -\frac{\pi}{4}; \operatorname{arctg}(x + 1) = \frac{2\pi}{3};$$

$$\text{б) для } 10-2: \arcsin x = 2 \arccos x; \arcsin x \cdot \arccos x = \frac{\pi^2}{18}; \arccos^2 x - \frac{3\pi}{4} \arccos x + \frac{\pi^2}{8} = 0.$$

11. Уметь решать неравенства вида:

$$\text{а) } \arcsin x < \frac{\pi}{6}; \arccos x < \frac{\pi}{3}; \operatorname{arctg} x \geq \frac{\pi}{4};$$

$$\text{б) для } 10-2: \arcsin(x - 3) + \arccos(x - 3) > \frac{1}{3}; \arccos \frac{4}{x^2} + \arcsin \frac{4}{x^2} < 2.$$

12. Уметь решать уравнения:

$$\sin 2x = 1; \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 3; \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 0; \operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = 1; \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 4.$$

13. Уметь решать уравнения:

$$\sin 2x = \frac{1}{2}; \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}; \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

14. Найдите нули функции $y = \sin \frac{x}{2}; y = \arccos(x + 1); y = \arcsin 2x; y = 3 \operatorname{ctg} 7x; y = |\operatorname{arctg}(x + 1, 4)|$